Задача 3. Покажите, что последовательность $b_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ возрастающая.

$x \geq -1$

$x = ?$

$\underbrace{b_n < b_{n+1}}$

$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad x \geq 0$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

$b_n = (1 - \frac{1}{n})^n$

$$\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \cdot \frac{n}{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \frac{n^{2n+1}}{(n+1)^n (n-1)^n (n+1)} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n >$$

$$> \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) > \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n}} = 1$$